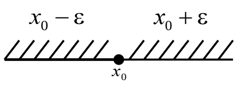
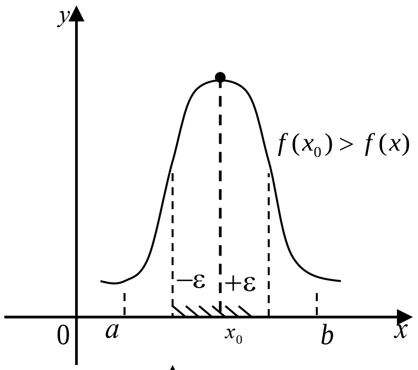
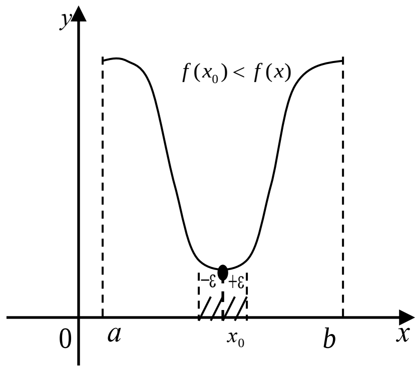
§9. Экстремумы функции

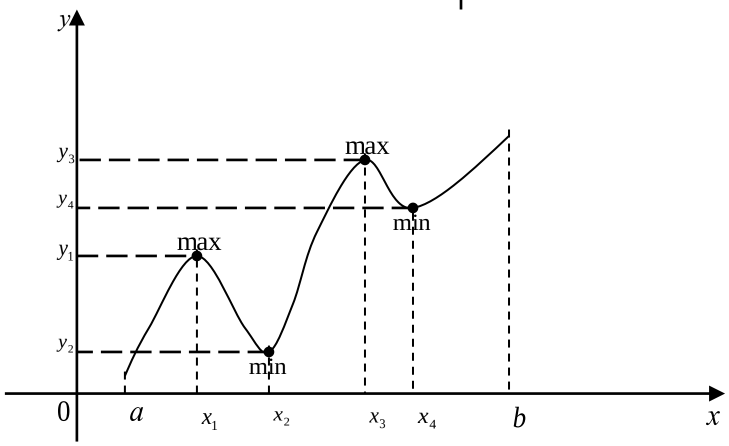
Определение 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 имеет $\max$, то значение функции $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in$ некоторой ε – окрестности точки x_0.

$x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$









Определение 2. Min и max данной функции $y = f(x)$ называются ***экстремумами***.

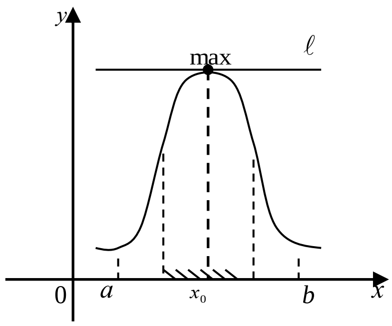
Экстремумы носят локальный (местный) характер. Это значит, что значение min функции может быть больше max ($y_{\min}(x_4) > y_{\max}(x_1)$).

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале $(a;b)$, то на этом интервале существуют точки, в которых функция принимает ***наибольшее*** и ***наименьшее*** значения.

$y(b)$ - наибольшее; $y(a)$ - наименьшее.

§10. Необходимый признак существования экстремума

Геометрически



$y'(x_0)=0$

$\ell \parallel OX\,; \alpha=0; \operatorname{tg}\alpha=0 \Rightarrow y'=0$

Определение 1. Если дифференцируемая функция в точке x_0 имеет $\max$ или $\min$, то производная этой функции в данной точке равна нулю.

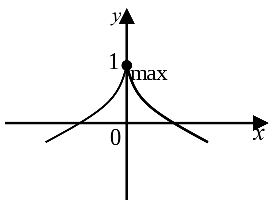
Замечание.

Функция может иметь экстремум и в точке, в которой производная не существует.

Пример: $y=1-\sqrt[3]{x^2}\,; \quad x\in(-\infty;\infty)$

$y'=0-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}; \quad y'\neq 0; \quad y'$ не существует при $x=0$.

Функция имеет острый $\max$, т.е. нельзя провести касательную.



Определение 2. Точки, в которых производная данной функции равна нулю или не существует, называются ***критическими***.

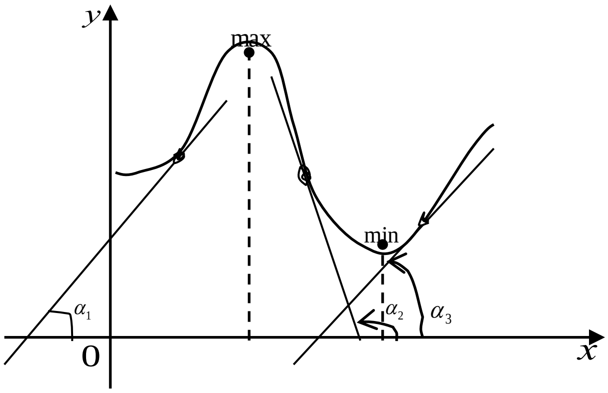
§11. Первый достаточный признак существования экстремума

x	$(a;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;b)$
y'	+	**0**	**-**	**0**	+
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max		min	

Определение 1. Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет производную во всех внутренних точках интервала $(a;b)$, содержащем критическую точку x_0, и при переходе слева направо через критическую точку производная меняет знак, то в этой точке существует ***экстремум***:

1). Если знак меняется с (+) на (-), то в этой точке $\underline{\max}$.

2). Если знак меняется с (-) на (+), то в этой точке $\underline{\min}$.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 - \textit{острый}\,; tg\alpha_1>0\,;\, y'>0(+)\\ \alpha_2 - \textit{тупой}\,; tg\alpha_2<0\,;\, y'<0(-)\end{array}\right\}\max$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 - \textit{тупой}\,; tg\alpha_2<0\,;\, y'<0(-)\\ \alpha_3 - \textit{острый}\,; tg\alpha_3>0\,;\, y'>0(+)\end{array}\right\}\min$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 - \text{острый}\,; \mathrm{tg}\,\alpha_1>0\,;\, y'>0(+)\\ \alpha_2 - \text{тупой}\,; \mathrm{tg}\,\alpha_2<0\,;\, y'<0(-)\end{array}\right\}\max$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 - \text{тупой}\,; \mathrm{tg}\,\alpha_2<0\,;\, y'<0(-)\\ \alpha_3 - \text{острый}\,; \mathrm{tg}\,\alpha_3>0\,;\, y'>0(+)\end{array}\right\}\min$$

Замечание.

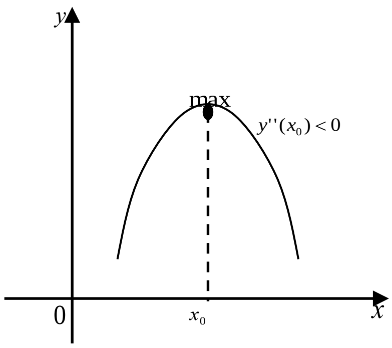
Если при переходе через критическую точку производная знак не меняет, то в данной точке экстремума нет.

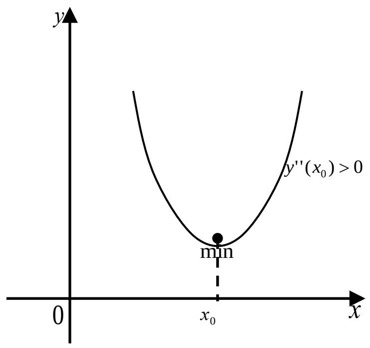
§12. Второй достаточный признак существования экстремума

Определение 1. Если в точке x_0 производная равна нулю $\left(y'\left(x_0\right)=0\right)$, y'' - существует и не равна нулю, то, если:

$\underline{y''(x_0)<0}$ - то функция имеет $\underline{\max}$;

$\underline{y''(x_0)>0}$ - то функция имеет $\underline{\min}$.

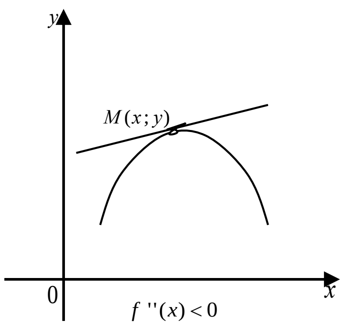


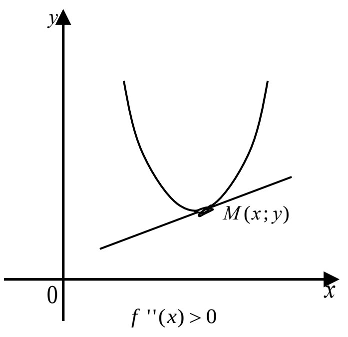


Замечание.

Если y'' в критической точке обращается в ноль или не существует, вторым достаточным признаком пользоваться нельзя и следует перейти к 1-му достаточному признаку.

§12. Выпуклость и вогнутость графика функции





Определение 1. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым***, если он расположен ***ниже*** любой своей касательной.

Определение 2. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым***, если он расположен ***выше*** любой своей касательной.

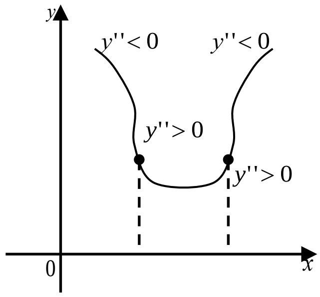
Достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции.

Определение 3. Если для дважды дифференцированной функции $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$:

а) $\underline{f''(x) < 0}$ во всех точках интервала, то график функции ***выпуклый*** на этом интервале;

б) $\underline{f''(x) > 0}$ - то график ***вогнутый.***

Определение 4. Точки графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющие выпуклую часть от вогнутой, называют ***точками перегиба***.



Пусть в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна и, если при переходе через точку x_0 y'' меняет знак, то график функции в точке x_0 имеет точку перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба.

Определение 5. Точки перегиба следует искать только среди таких, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует.

x	$(a;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;b)$
y''	+	**0**	-	**0**	-
y		перегиб		нет перегиба	

§13. Асимптоты графика функции

Определение 1. Прямая называется ***асимптотой*** для кривой, если расстояние от текущей точки M этой кривой до прямой стремится к нулю, при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Асимптоты бывают:

1) вертикальные;
2) наклонные;
3) горизонтальные.

1. Наклонные асимптоты (их не более двух).

Уравнения наклонных асимптот ищут в виде $\boxed{y = kx + b}$,

где $\boxed{k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x}}$; $\boxed{b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx)}$.

Замечания:

1. Эти пределы должны существовать и быть конечными, иначе наклонных асимптот нет.
2. Если $k = 0$ => $\boxed{y = b}$ - горизонтальная асимптота

$k=0$; $b=0$ => $\boxed{y=0}$ - горизонтальная асимптота – ось OX.

3. Горизонтальные асимптоты – это частный случай наклонных асимптот.

2. Вертикальные асимптоты.

Если функция $y=f(x)$ имеет точки разрыва, то график этой функции имеет вертикальные асимптоты.

Определение 2. Прямая $x=a\left(\ell \parallel OY\right)$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$$

График функции может иметь одну, две или бесконечное множество вертикальных асимптот.

§14. Общая схема исследования функции

1. Область определения функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2. Нули функции (точки пересечения графика с осями координат).
3. Четность и нечетность функции (симметрия графика).
4. Наклонные и горизонтальные асимптоты.
5. Интервалы возрастания и убывания функции, экстремум функции.
6. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
7. Эскиз графика функции.